МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра цифровых технологий, математики и экономики

Методическая разработка
к выполнению индивидуального домашнего задания по теме «Элементы гармонического анализа (ряды Фурье и интеграл Фурье)»

по дисциплине: *Дополнительные разделы математического анализа*

для направлений: 09.03.01 *Информатика и вычислительная техника*
09.03.02 *Информационные системы и технологии*
наименование направления подготовк

бакалавриат, очная форма обучения
наименование специальности, форма обучения

Мурманск
2022

Составитель: Кацуба Валентина Сергеевна, канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики.

Методическая разработка к выполнению индивидуального домашнего задания «Элементы гармонического анализа (ряды Фурье и интеграл Фурье)» по дисциплине «Дополнительные разделы математического анализа» рассмотрена и одобрена на заседании кафедры-разработчика цифровых технологий, математики и экономики

24.05.2022 г., протокол №9 .

дата

Рецензент – Ромахова Ольга Андреевна, старший преподаватель кафедры цифровых технологий, математики и экономики

Оглавление

1. Общие организационно-методические указания

Индивидуальное домашнее задание включает типовые практические задачи по теме «Элементы гармонического анализа (ряды Фурье и интеграл Фурье)» в дисциплине «Дополнительные разделы математического анализа» и выполняется как часть контрольной работы студентами второго курса направлений 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» и 09.03.02 «Информационные системы и технологии», бакалавриат.

Целевая установка: при выполнении ИДЗ студент должен

- показать усвоенный теоретический материал по представлению функций тригонометрическими рядами Фурье или интегралами Фурье,
- знать условия, при которых эти представления возможны,
- уметь практически представить заданную функцию рядом или интегралом Фурье и получить основные спектральные характеристики функции,
- подтвердить полученные представления построением графиков с использованием ПМП «Mathematica» или другого математического пакета.

2. Задание, план выполнения, требования к оформлению отчета

ИДЗ содержит четыре задачи, из которых первые три относятся к рядам Фурье, а четвертая – к интегралу Фурье. Третье задание может быть объявлено преподавателем как бонусное. Для каждой задачи предлагается план ее решения.

Содержание задач каждого варианта

Задача 1. Разложить в ряд Фурье 2π - периодическую функцию и записать сумму полученного ряда по теореме Дирихле и построить её график.

Задача 2. Разложить в ряд Фурье $2l$ - периодическую функцию и составить сумму полученного ряда по теореме Дирихле. Найти амплитудный спектр функции и построить его график.

Задача 3. Составить ряд Фурье в комплексной форме для функции $f(x)$, периодической с $T = 2l$; найти дискретный амплитудный спектр функции $f(x)$.

Задача 4. Составить представление непериодической функции $f(x)$, $x \in (-\infty;+\infty)$ интегралом Фурье; записать преобразования Фурье этой функции и найти ее амплитудный спектр.

Общие требования к выполнению и сдаче ИДЗ

- Задания могут выполняться в рабочей тетради по практическим занятиям и предъявляться к зачтению поштучно;
- каждая задача должна иметь условие, подробное решение и ответ;
- в решении нужно ссылаться на теоретические факты (из темы ИДЗ), на основании которых строится решение;
- построение графиков и приведение подробных выкладок в решении обязательно;
- в каждой задаче необходимо сделать графическое подтверждение достоверности решения.

3. Список рекомендуемых учебных ресурсов

1. Конспект лекций ведущего преподавателя дисциплины.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. – М.: Рольф, 2000.– 256с.
3. Данко П.Б., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х частях. Часть II: Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1997. – 416с.
4. Мостовской А.П. Информационные технологии в математике: Учебное пособие. – Мурманск: МГПУ, 2005. -16с.
5. Дьяконов В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 624с.

4. Образец варианта заданий

Задача 1 Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функции $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\pi;0)\\ \sin x, & x\in[0;\pi]\end{cases}$, имеющую наименьший период $T=2\pi$. Составить сумму ряда $S(x)$ и построить её график.

Задача 2 Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=x^2$, $x\in[-1;1)$, $T=2$. Составить сумму ряда $S(x)$. Найти амплитудный спектр функции и построить его график.

План решения задач 1 и 2

1. Постройте график функции $f(x)$, $x\in[-l;l)$ и ее периодического продолжения. Проанализируйте возможность разложения $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.
2. Запишите теоретический вид ряда Фурье для $f(x)$ и формулы для коэффициентов ряда, учитывая величину периода и свойства четности функции $f(x)$, если оно есть.
3. Вычислите коэффициенты ряда a_0, a_n и b_n, подставьте их в формально составленный ранее ряд Фурье.
4. Подтвердите достоверность разложения построением графиков частичных сумм $S_k(x)$ составленного ряда Фурье, увеличивая k до визуального совпадения графиков функций $S_k(x)$ и $f(x)$.
5. Запишите сумму ряда $S(x),\ x\in(-\infty;+\infty)$, используя теорему Дирихле; постройте график функции $S(x)$.
6. Найдите амплитудный спектр $A_n=\sqrt{(a_n)^2+(b_n)^2}$ и постройте его график.
7. Составьте ответ по задаче.

Задача 3 Составить ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции $f(x)=e^{-2x},\ x\in(-\pi;\pi],\ T=2\pi$. Определить дискретный амплитудный спектр функции $f(x)$.

План решения задачи 3

1. Составьте ряд Фурье в комплексной форме для функции $f(x)$, $x\in(-l;l)$, вычислите коэффициенты ряда. Запишите сумму ряда $S(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$, используя теорему Дирихле.
2. Перейдите от комплексной формы ряда Фурье к его действительной форме и подтвердите достоверность разложения построением графиков

нескольких частичных сумм составленного ряда Фурье в действительной форме.

3. Определите дискретный амплитудный спектр функции $f(x)$. Вычислите значения нескольких амплитуд A_n, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, \ldots$. Постройте график $A_n = A(\omega_n)$, где ω_n – частота n-й гармоники.
4. Составьте ответ по задаче.

Задача 4 Составить представления функции $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$ интегралом Фурье. Записать преобразования Фурье и определить непрерывный амплитудный спектр функции $f(x)$.

План решения задачи 4

1. Составьте представления функции $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме и в комплексной форме. Запишите функцию $S(x)$, к которой сходится составленный интеграл Фурье.
2. Подтвердите достоверность представления построением графика интеграла Фурье на промежутке $x \in (-l; l)$, где число l нужно взять большим.
3. Запишите косинус-преобразование, синус-преобразование и комплексное преобразование Фурье функции $f(x)$.
4. Определите непрерывный амплитудный спектр $A(\omega)$ функции $f(x)$, постройте его график.
5. Составьте ответ по задаче.

5. Пример выполнения заданий ИДЗ

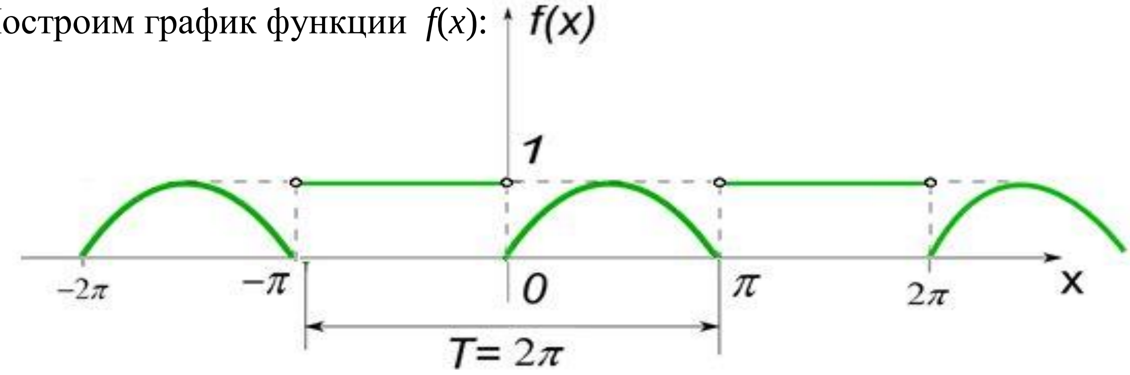
***Задача* 1**

Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}1, & x\in(-\pi;0)\\ \sin x, & x\in[0;\pi]\end{cases}$,

имеющую наименьший период $T=2\pi$. Составить сумму ряда $S(x)$ и построить её график.

Решение

1. Построим график функции $f(x)$:



Функция $f(x)$ является кусочно-непрерывной (то есть имеет только конечное число точек разрыва первого рода) в каждой точке промежутка $x\in[-\pi;\pi]$, следовательно, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, поэтому её можно представить тригонометрическим рядом Фурье.

2. Записываем вид ряда Фурье и формулы для его коэффициентов, учитывая, что $f(x)$ является 2π -периодической функцией:

$$f(x)\to\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx;$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx;\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\cdot dx;\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\cdot dx.$$

3. Вычисляем коэффициенты Фурье для данной функции $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}1\cdot dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\cdot dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(x\Big|_{-\pi}^{0}+(-\cos x)\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}(\pi+2)=\boxed{1+\frac{2}{\pi}=a_0}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}1\cdot\cos nx\cdot dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\cdot\cos nx\cdot dx\right)=\left\{\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\right\}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}}_{0}+\frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\pi}\sin x(n+1)\cdot dx+\int_{0}^{\pi}\sin x(1-n)\cdot dx\right)\underset{n\neq1}{=\!=}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{-\cos(1-n)x}{1-n}\right)\Bigg|_{x=0}^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{-\cos(1-n)\pi}{1-n}+\frac{1}{1-n}\right)=\left\{\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\pi n}{n+1}+\frac{\cos\pi n}{1-n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1-n}\right)=\left\{\cos\pi n=(-1)^n\right\}=\frac{1}{2\pi}\left((-1)^n\frac{1-n+n+1}{1-n^2}+\frac{1-n+n+1}{1-n^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2}{1-n^2}\left((-1)^n+1\right)=\boxed{\frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}=a_n,\quad n=2,\ 3,\ 4,\ldots};$$

$$a_1=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi\sin x(1+1)\,dx+\int_0^\pi\sin x(1-1)\,dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi\sin 2x dx+\int_0^\pi\sin 0 dx\right)=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\bigg|_0^\pi+0\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\cos 2\pi-\cos 0\right)=\boxed{0=a_1};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^0 1\cdot\sin nx\cdot dx+\int_0^\pi\sin x\cdot\sin nx\cdot dx\right)=\left\{\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{-\cos nx}{n}\bigg|_{-\pi}^0+\frac{1}{2\pi}\left(-\int_0^\pi\cos x(n+1)\cdot dx+\int_0^\pi\cos x(1-n)\cdot dx\right)\underset{n\neq 1}{=\!=}$$

$$=\frac{(-1)^n-1}{\pi n}+\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right)\bigg|_{x=0}^{\pi}=$$

$$=\frac{(-1)^n-1}{\pi n}+\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\sin(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\sin(1-n)\pi}{1-n}+\frac{\sin 0}{n+1}-\frac{\sin 0}{1-n}\right)=\boxed{\frac{(-1)^n-1}{\pi n}=b_n,\quad n=2,\ 3,\ 4,\ldots};$$

$$b_1=\frac{-2}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\left(-\int_0^\pi\cos 2x dx+\int_0^\pi\cos 0 dx\right)=\frac{-2}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\sin 2x}{2}\bigg|_0^\pi+x\big|_0^\pi\right)=\frac{-2}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\left(0+\pi\right)=\boxed{\frac{-2}{\pi}+\frac{1}{2}=b_1}.$$

Таким образом, для данной функции $f(x)$ значения коэффициентов Фурье получились следующими:

$$a_0=1+\frac{2}{\pi},\quad a_1=0,\quad b_1=\frac{-2}{\pi}+\frac{1}{2};\ \text{при}\ n=2,\ 3,\ 4,\ldots\quad a_n=\frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)},\quad b_n=\frac{(-1)^n-1}{\pi n}.$$

Подставляем вычисленные коэффициенты в формально записанный ранее ряд Фурье:

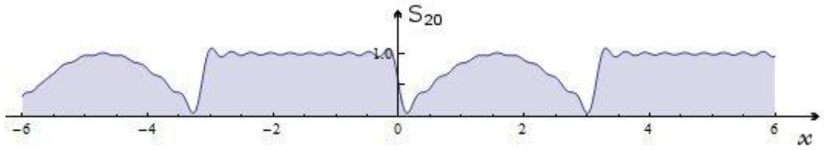
$$f(x)\to\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}+\left(\frac{-2}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\sin x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}\cos nx+\frac{(-1)^n-1}{\pi n}\sin nx\,.$$

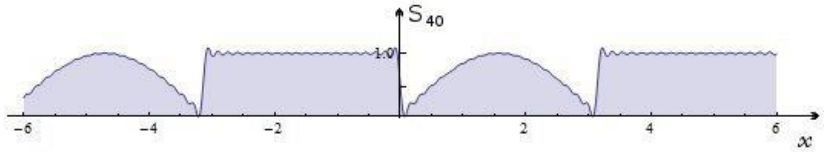
4. Для проверки достоверности разложения построим графики нескольких частичных сумм составленного ряда Фурье:

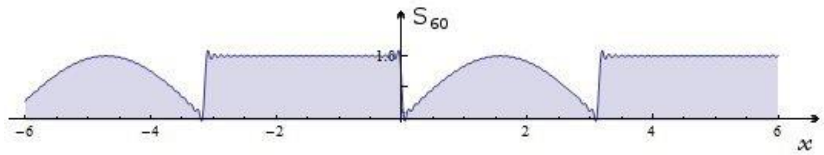
$$S_k\left(x\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}+\left(\frac{-2}{\pi}+\frac{1}{2}\right)\sin x+\sum_{n=2}^{k}\frac{1+(-1)^n}{\pi(1-n^2)}\cos nx+\frac{(-1)^n-1}{\pi n}\sin nx\,.$$

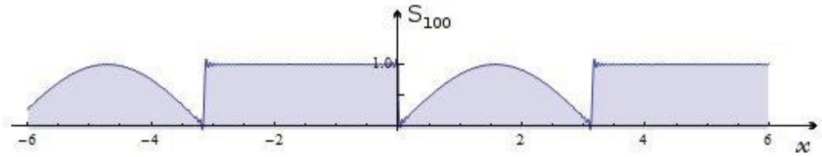
Используем ПП «Wolfram Mathematica 7»:

$$\text{Plot}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}+\left(-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{2}\right)*Sin[x]+\frac{1}{\pi}*\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}*\text{Cos}[n*x]+\frac{(-1)^n-1}{n}*\text{Sin}[n*x]\right),\ \{x,\ -6,\ 6\}\right]$$









Построенные графики частичных сумм показывают, что искомое разложение составлено верно, так как графики частичных сумм визуально близки к графику функции $f(x)$.

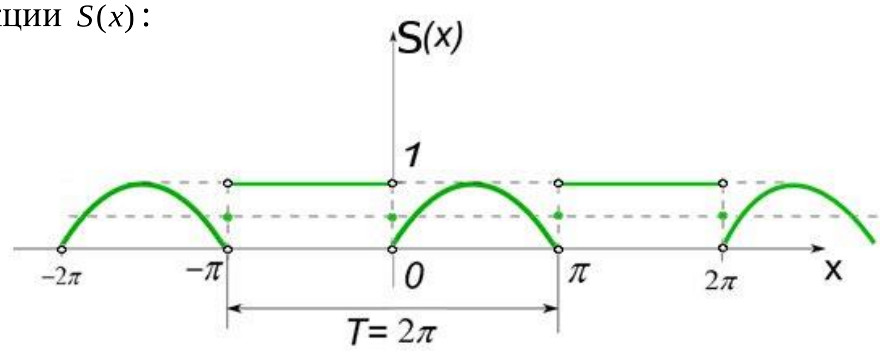
6. Составляем сумму $S(x)$ полученного ряда Фурье, используя теорему Дирихле, которая относительно суммы $S(x)$ утверждает следующее:

$$\left[\begin{array}{l} S(x)=f\left(x\right),\ \text{если } x-\ \text{точка непрерывности } f\left(x\right) \\ S(x_0)=\dfrac{f\left(x_0-0\right)+f\left(x_0+0\right)}{2},\ \text{если } x_0-\ \text{точка разрыва } f\left(x\right) \end{array}\right.$$

На основании этой теоремы в решаемой задаче получаем:

$$\left[\begin{array}{l} S\left(x\right)=1,\ x\in\left(-\pi;\ 0\right) \\ S\left(x\right)=\sin x,\ x\in\left(0;\ \pi\right) \\ S\left(x\right)=0{,}5,\ x\in\{0,\ -\pi,\ \pi\},\ \text{функция } S\left(x\right)-\ \text{периодическая с } T=2\pi. \end{array}\right.$$

График функции $S(x)$:



Построив этот график, нужно понимать, что значения суммы полученного ряда Фурье для функции $f(x)$ совпадают со значениями $f(x)$ только в точках её непрерывности и получаются иными в точках разрыва $f(x)$. Поэтому, записывая в ответ знак равенства между функцией и соответствующим ей тригонометрическим рядом Фурье нужно помнить, что это равенство выполняется в смысле «почти всюду».

Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}+\left(\dfrac{-2}{\pi}+\dfrac{1}{2}\right)\sin x+\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(1-n^2)}\cos nx+\dfrac{(-1)^n-1}{n}\sin nx,$

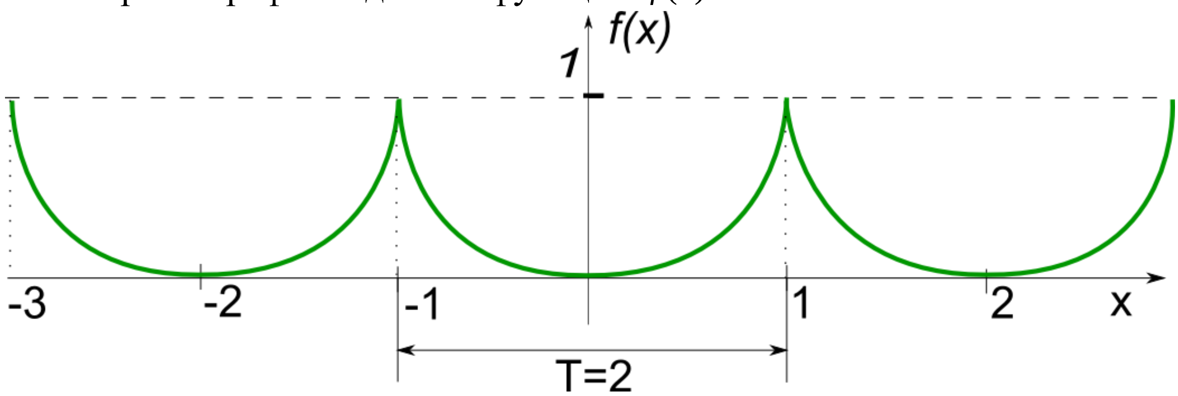
$$\left[\begin{array}{l} S(x)=1,\ x\in(-\pi;\,0) \\ S(x)=\sin x,\ x\in(0;\,\pi) \\ S(x)=0,5,\ x\in\{0,\,-\pi,\,\pi\},\ \text{функция } S(x)-\ \text{периодическая с } T=2\pi. \end{array}\right.$$

***Задача* 2**

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$, $x\in[-1;1)$, $T=2$. Составить сумму ряда $S(x)$. Найти амплитудный спектр функции и построить его график.

Решение

1. Построим график заданной функции $f(x)$:



Функция является непрерывной, поэтому удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, следовательно, может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье при $\forall\, x \in (-\infty;\ +\infty)$.

2. Записываем вид соответствующего ряда Фурье для $2l$-периодической функции и формулы для его коэффициентов

$$f(x) \to \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l};$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx; \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx; \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx; \qquad l = 1.$$

Данная функция является четной, поэтому её коэффициенты Фурье можно вычислить по упрощенным формулам, которые учитывают четность функции $f(x)$:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx; \qquad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx,\ \ n = 1,2,3...; \qquad b_n = 0,\ \ n = 1,2,3...;$$

3. Вычисляем коэффициенты a_0 и a_n для данной в задаче функции:

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \boxed{\frac{2}{3} = a_0};$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2\cos\pi n x dx = \left\{\begin{array}{l|l} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = \cos\pi n x dx & v = \dfrac{\sin\pi n x}{\pi n}\end{array}\right\} = 2\left(\frac{x^2\sin\pi n x}{\pi n}\right)\Bigg|_{x=0}^{1} - \frac{4}{\pi n}\int_0^1 x\sin\pi n x dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = \sin\pi n x dx & v = \dfrac{-\cos\pi n x}{\pi n}\end{array}\right\} = 0 - \frac{4}{\pi n}\left(\left(\frac{-x\cos\pi n x}{\pi n}\right)\Bigg|_{x=0}^{1} + \frac{1}{\pi n}\int_0^1 \cos\pi n x dx\right) =$$

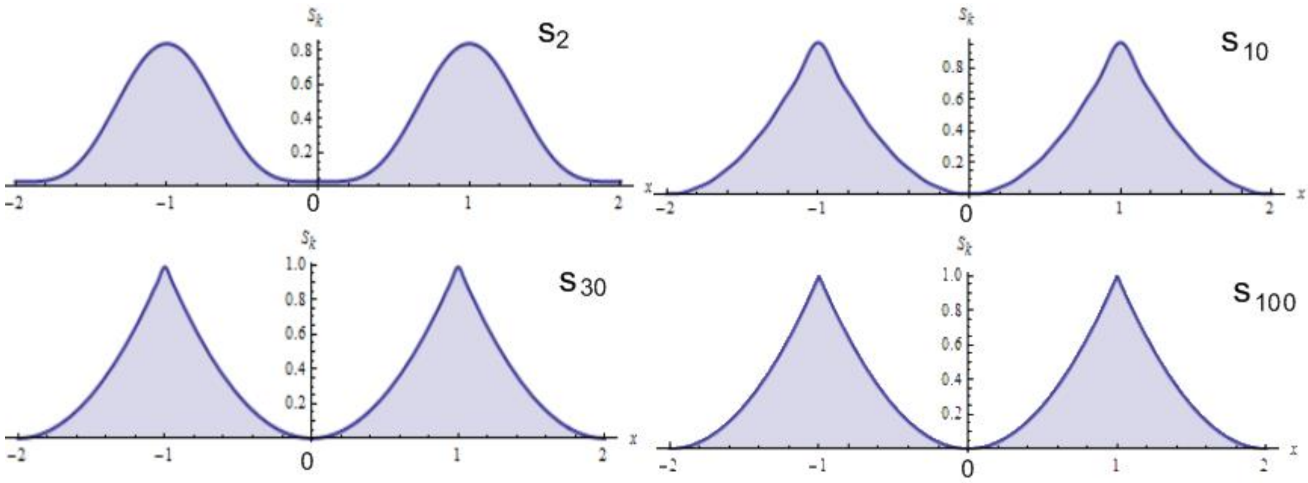
$$= \frac{4\cos\pi n}{\pi^2 n^2} - \frac{4}{\pi n}\left(\frac{\sin\pi n x}{\pi n}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4\cos\pi n}{\pi^2 n^2} = \boxed{\frac{(-1)^n 4}{\pi^2 n^2} = a_n,\ n = 1,2,3...};$$

подставляем посчитанные коэффициенты в записанный формально ряд Фурье:

$$f(x) \to \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi n x.$$

4. Убедимся в достоверности полученного разложения, построив нескольких частичных сумм $S_k(x)$ составленного ряда , используя, например, ПП «Wolfram Mathematica 7»:

$$\text{Plot}[\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}*\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^n}{n^2}\text{Cos}[\pi*n*x],\ \{x,-2,2\}]$$



5. Сумма ряда $S(x)$ совпадает с $f(x)$ при $\forall\, x\in(-\infty;\ +\infty)$, так как $f(x)$ является непрерывной, поэтому $S(x)=x^2,\ x\in[-1;\,1),\ T=2.$ В этой задаче график суммы $S(x)$ такой же, как и график $f(x)$. В ответ можно записать знак равенства в обычном смысле между функцией $f(x)$ и её рядом Фурье.

6. Дискретный амплитудный спектр данной функции $f(x)$ – это есть множество чисел $A_n=\sqrt{(a_n)^2+(b_n)^2}, n\in\mathbb{N}$, каждое из которых задает значение амплитуды гармоники с соответствующим номером *n*. В решаемой задаче при разложении функции в тригонометрический ряд Фурье получены значения $a_n=\dfrac{(-1)^n 4}{\pi^2 n^2},\ b_n=0,\ n=1,2,3...$, поэтому $A_n=\sqrt{\left(\dfrac{(-1)^n 4}{\pi^2 n^2}\right)^2+0^2}=\dfrac{2}{\pi n},\ n\in\mathbb{N}$.

Часто принято записывать амплитуды как функции частот соответствующих гармоник. Для данной функции $f(x)$ частотами являются числа $\omega_n=\pi n$, поэтому $A_n(\omega_n)=\dfrac{2}{\omega_n}$. График этой функции имеет вид дискретного множества точек.

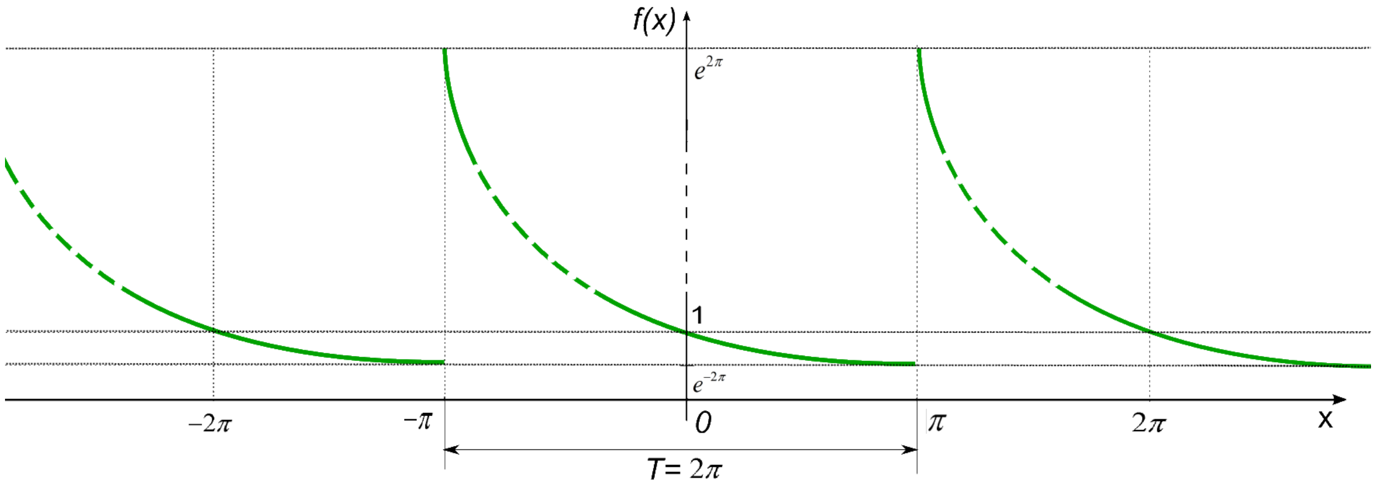
Ответ: $f(x)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos\pi nx,\quad x\in[-1;\,1),\quad T=2$; $A_n(\omega_n)=\dfrac{2}{\omega_n},\ n\in\mathbb{N}$.

***Задача* 3**

Составить ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции $f(x)=e^{-2x},\ x\in(-\pi;\pi],\ T=2\pi$. Определить дискретный амплитудный спектр функции.

Решение

1. Построим график заданной функции, учитывая её периодичность:



Функция $f(x)$ является ограниченной, кусочно-непрерывной, имеет разрывы только первого рода и они образуют конечное множество на промежутке $x \in [-\pi;\pi]$ и счётное множество на всей числовой оси, поэтому эта функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, следовательно, может быть представлена тригонометрическим рядом Фурье.

Записываем вид этого ряда в комплексной форме и формулы для его коэффициентов:

$$\underset{T=2\pi,\, x\in[-\pi;\pi)}{f(x)} \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx .$$

Вычисляем коэффициенты c_n для заданной функции:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-2x} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-x(2+in)}}{-2-in}\right)\Bigg|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-\pi(2+in)}}{-2-in} - \frac{e^{\pi(2+in)}}{-2-in}\right) = \left\{e^{\pm i\pi n} = (-1)^n\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-2\pi}(-1)^n - e^{2\pi}(-1)^n}{-2-in}\right) = \boxed{\frac{(-1)^n \operatorname{sh}2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}(2-in) = c_n}.$$

Подставляем коэффициенты c_n и получаем ряд Фурье в комплексной форме для данной функции:

$$\underset{T=2\pi,\, x\in[-\pi;\pi)}{f(x)} \to \frac{\operatorname{sh}2\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (2-in) e^{inx}}{4+n^2} .$$

Запишем сумму составленного ряда по теореме Дирихле:

$$\left[\begin{array}{l} S(x)=e^{-2x},\ \forall x\in(-\pi;\ \pi) \\ S(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to\pi-0} f(x)+\lim\limits_{x\to\pi+0} f(x)}{2}=\dfrac{e^{+2\pi}+e^{-2\pi}}{2}=\mathrm{ch}2\pi,\quad x\in\{-\pi;\ \pi\} \end{array}\right.,$$

$S(x)$ - периодическая функция с периодом $T=2\pi$.

2. Чтобы записать полученный ряд Фурье в действительной форме, можно воспользоваться теоретически известными формулами, связывающими коэффициенты обеих форм ряда Фурье:

$$a_0=2c_0,\quad a_n=(c_n+c_{-n})=2\operatorname{Re}c_n,\ b_n=i(c_n-c_{-n})=-2i\operatorname{Im}c_n,\ n=1,2,\ldots,$$

или можно выполнить объединение в пары слагаемых комплексного ряда, отличающихся только знаком индекса. В результате выполнения этой работы получим:

$$a_0=\frac{\mathrm{sh}2\pi}{\pi},\qquad a_n=\frac{(-1)^n 4\mathrm{sh}2\pi}{\pi(4+n^2)},\qquad b_n=\frac{(-1)^n 2n\mathrm{sh}2\pi}{\pi(4+n^2)}\ \Rightarrow$$

$$f(x)\to\frac{\mathrm{sh}2\pi}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4\mathrm{sh}2\pi}{\pi(4+n^2)}\cos nx+\frac{(-1)^n 2n\mathrm{sh}2\pi}{\pi(4+n^2)}\sin nx\ \Leftrightarrow$$

$$f(x)\to\frac{\mathrm{sh}2\pi}{2\pi}+\frac{2\mathrm{sh}2\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{(4+n^2)}\cos nx+\frac{(-1)^n n}{(4+n^2)}\sin nx.$$

Построим графики частичных сумм $S_k(x)$ ряда Фурье, используя действительную форму этого ряда:

$$S_k(x)=\frac{\mathrm{sh}2\pi}{2\pi}+\frac{2\mathrm{sh}2\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^n 2}{(4+n^2)}\cos nx+\frac{(-1)^n n}{(4+n^2)}\sin nx;$$

будем увеличивать количество членов ряда k до визуального совпадения графика частичной суммы $S_k(x)$ и исходной функции $f(x)$:

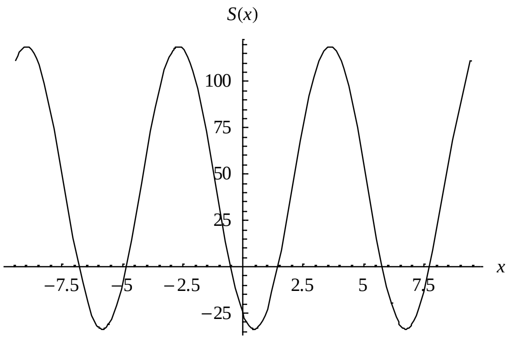
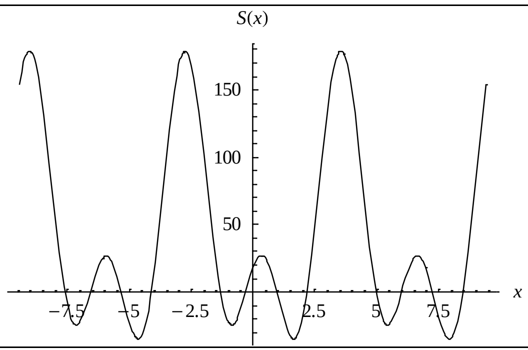
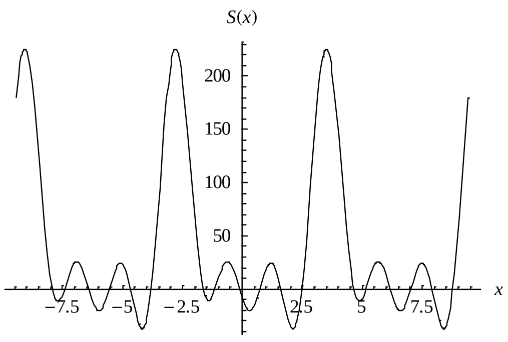
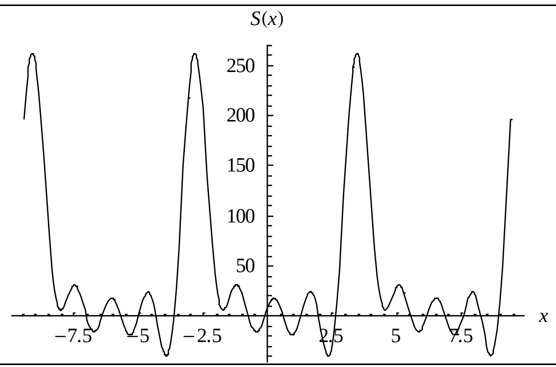
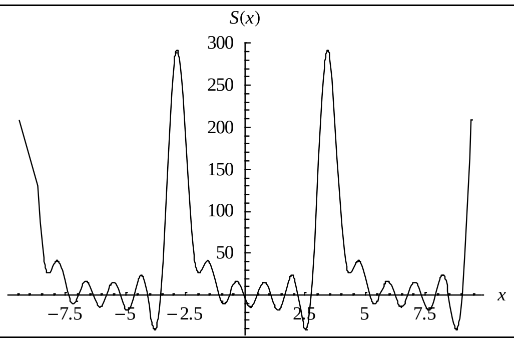
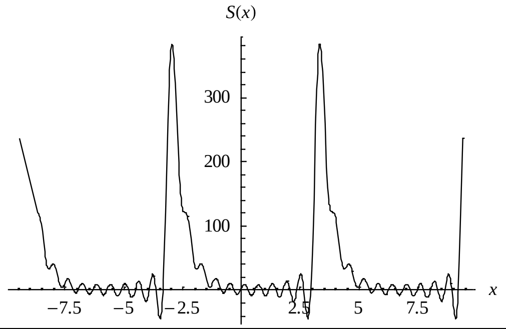
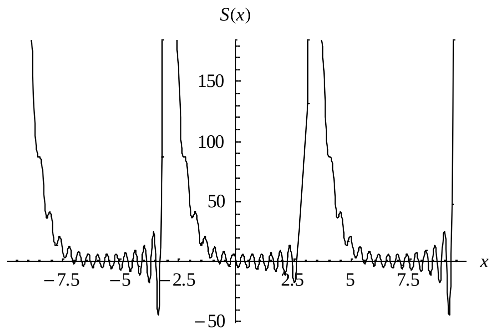
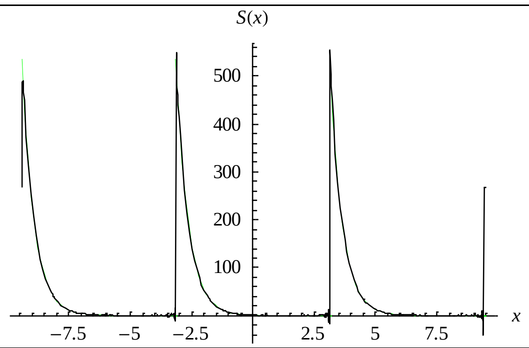
k	1	2
График $S_k(x)$		
k	3	4

График $S_k(x)$		

k	5	10
График $S_k(x)$		
k	15	250
График $S_k(x)$		

3. Определим дискретный амплитудный спектр заданной функции и построим его график, используя для этого следующие теоретические формулы:

$$A(\omega_n)=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\quad \omega_n=n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ldots \text{ или } A(\omega_n)=|c_n|,\quad \omega_n=n,\quad n=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ldots$$

В данной задаче

$$A(\omega_n)=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=\sqrt{\left(\frac{(-1)^n 4\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}\right)^2+\left(\frac{(-1)^n 2n\cdot sh2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}\right)^2}=\frac{2sh2\pi\sqrt{4+n^2}}{\pi\left(4+n^2\right)}=\frac{2sh2\pi}{\pi\sqrt{4+n^2}},\ n=1,\ 2,\ \ldots;$$

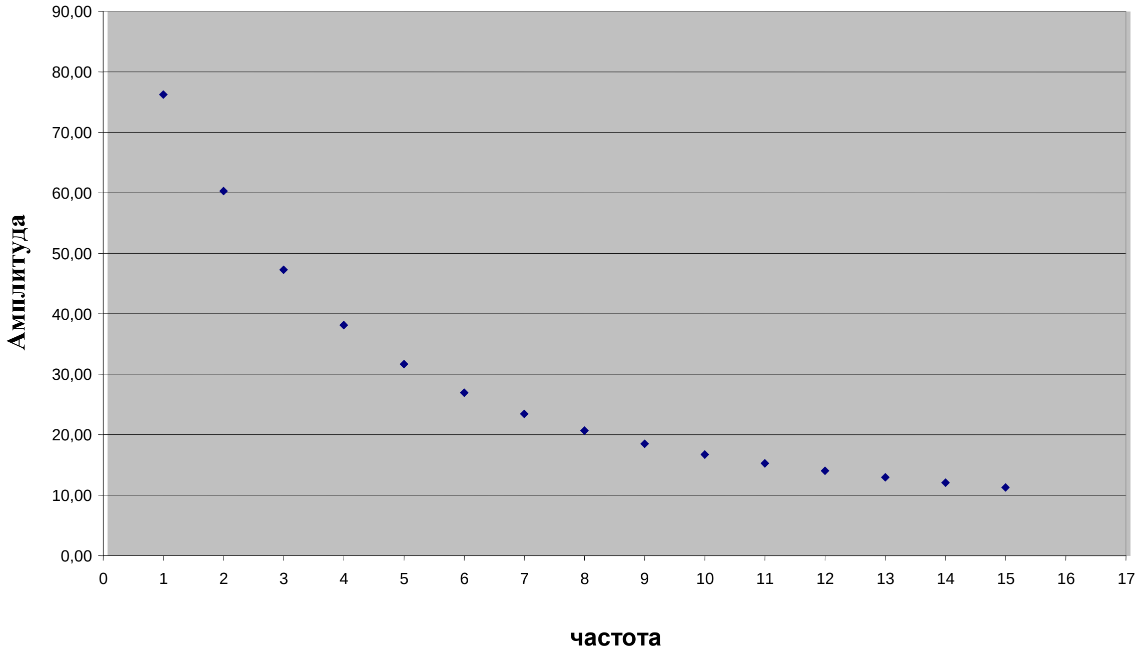
$$A(\omega_n)=|c_n|=\left|\frac{(-1)^n\,\mathrm{sh}2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}(2-in)\right|=\frac{\mathrm{sh}2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}|2-in|=\frac{\mathrm{sh}2\pi}{\pi\left(4+n^2\right)}\sqrt{4+n^2}=\frac{sh2\pi}{\pi\sqrt{4+n^2}},\ n=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots;$$

очевидно, что $A(\omega_n)=\frac{1}{2}A(\omega_n)$ при $n=1,\ 2,\ \dots$

Таблица значений $A(\omega_n)$

ω_n	1	2	3	4	5	6	7	8
$A(\omega_n)$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{5}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{2}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{13}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{5}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{29}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{10}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{53}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{17}\pi}$
приближ. значение $A(\omega_n)$	76.228	60.264	47.274	38.114	31.652	26.950	23.413	20.670
ω_n	9	10	11	12	13	14	15	250
$A(\omega_n)$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{85}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{26}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{5\sqrt{5}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{37}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{173}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{5\sqrt{2}\pi}$	$\frac{2\text{sh}2\pi}{\sqrt{229}\pi}$	$\frac{\text{sh}2\pi}{\sqrt{15626}\pi}$
приближ. значение $A(\omega_n)$	18.488	16.714	15.245	14.011	12.959	12.052	11.264	0.682

График амплитудного спектра $A(\omega_n),\ \omega_n=n=1,\ 2,\ 3,\ \dots$



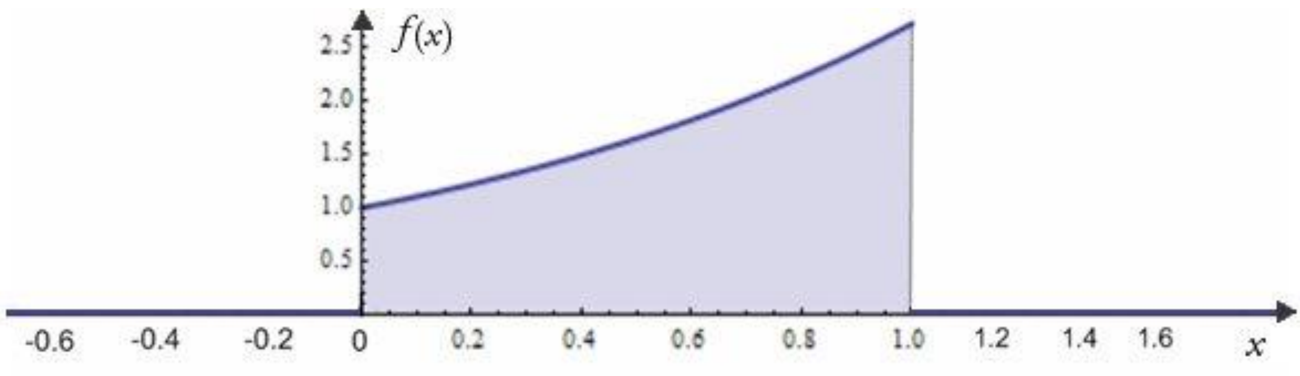
Ответ: $\underset{T=2\pi,\ x\in[-\pi;\pi]}{f(x)}=\frac{\text{sh}2\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4+n^2}(2-in)e^{inx}$; $\quad A(\omega_n)=\frac{2sh2\pi}{\pi\sqrt{4+n^2}}$, $\quad \omega_n=n,\quad n=1,\ 2,\ 3,\dots$.

Задача **4**

Составить представления функции $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\in[0;1] \\ 0, & x\notin[0;1] \end{cases}$ интегралом Фурье. Найти преобразования Фурье и определить непрерывный амплитудный спектр функции $f(x)$.

Решение

1. Построим график заданной функции $f(x)$:



Данная функция *f*(*x*) на каждом отрезке [-*l*,*l*], где *l* – любое число, кусочно-монотонная (в нестрогом смысле), кроме того, *f*(*x*) – абсолютно интегрируемая функция, т.е. сходится несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx=\int\limits_{0}^{1}e^x dx=e-1$. Таким образом, функция может быть представлена интегралом Фурье.

Составим представление функции $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме, которое имеет следующий теоретический вид:

$$f(x)=\int\limits_{0}^{\infty}\left(a(\omega)\cdot\cos\omega x+b(\omega)\cdot\sin\omega x\right)d\omega,$$

где $a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot\cos\omega x\cdot dx,\quad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\cdot\sin\omega x\cdot dx.$ (1)

Вычисляем функции $a(\omega),b(\omega)$, замечая при этом, что есть особый случай интегрирования при значении $\omega=0$:

1) если $\omega\neq 0$, то

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{1}e^x\cos\omega x dx=\frac{e}{\pi(\omega^2+1)}(\cos\omega+\omega\sin\omega)-\frac{1}{\pi(\omega^2+1)};$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} e^{x}\sin\omega x dx=\frac{e}{\pi(\omega^{2}+1)}(-\omega\cos\omega+\sin\omega)+\frac{\omega}{\pi(\omega^{2}+1)};$$

вычисление интегралов проведено методом интегрирования по частям:

$$\int e^{x}\cos\omega x dx=\left\{\begin{matrix} u=e^{x} \\ dv=\cos\omega x dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=e^{x}dx \\ v=\dfrac{\sin\omega x}{\omega} \end{matrix}\right.\right\}=e^{x}\frac{\sin\omega x}{\omega}-\frac{1}{\omega}\int e^{x}\sin\omega x dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=e^{x} \\ dv=\sin\omega x dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=e^{x}dx \\ v=\dfrac{-\cos\omega x}{\omega} \end{matrix}\right.\right\}=e^{x}\frac{\sin\omega x}{\omega}+e^{x}\frac{\cos\omega x}{\omega^{2}}-\frac{1}{\omega^{2}}\int e^{x}\cos\omega x dx\Rightarrow$$

$$\int e^{x}\cos\omega x dx=\frac{\omega^{2}\left(e^{x}\dfrac{\sin\omega x}{\omega}+e^{x}\dfrac{\cos\omega x}{\omega^{2}}\right)}{\omega^{2}+1}=\frac{e^{x}}{\omega^{2}+1}(\cos\omega x+\omega\sin\omega x)+C.$$

$$\int e^{x}\sin\omega x dx=\left\{\begin{matrix} u=e^{x} \\ dv=\sin\omega x dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=e^{x}dx \\ v=\dfrac{-\cos\omega x}{\omega} \end{matrix}\right.\right\}=-e^{x}\frac{\cos\omega x}{\omega}+\frac{1}{\omega}\int e^{x}\cos\omega x dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix} u=e^{x} \\ dv=\cos\omega x dx \end{matrix}\left|\begin{matrix} du=e^{x}dx \\ v=\dfrac{\sin\omega x}{\omega} \end{matrix}\right.\right\}=-e^{x}\frac{\cos\omega x}{\omega}+e^{x}\frac{\sin\omega x}{\omega^{2}}-\frac{1}{\omega^{2}}\int e^{x}\sin\omega x dx\Rightarrow$$

$$\int e^{x}\sin\omega x dx=\frac{\omega^{2}\left(e^{x}\dfrac{\sin\omega x}{\omega^{2}}-e^{x}\dfrac{\cos\omega x}{\omega}\right)}{\omega^{2}+1}=\frac{e^{x}}{\omega^{2}+1}(-\omega\cos\omega x+\sin\omega x)+C;$$

2) если $\omega=0$, то

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} e^{x}\cdot\cos 0 dx=\frac{e-1}{\pi};$$

$$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} e^{x}\cdot 0=0;$$

эти же значения могут быть получены посредством предельного перехода при условии $\omega\to 0$ в предыдущих формулах, полученных для случая $\omega\neq 0$:

$$\lim_{\omega\to 0}a(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{e}{\pi(\omega^{2}+1)}(\cos\omega+\omega\sin\omega)-\frac{1}{\pi(\omega^{2}+1)}\right)=\frac{e-1}{\pi};$$

$$\lim_{\omega\to 0}b(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\left(\frac{e}{\pi(\omega^{2}+1)}(-\omega\cos\omega+\sin\omega)+\frac{\omega}{\pi(\omega^{2}+1)}\right)=0.$$

Подставляя функции $a(\omega)$ и $b(\omega)$ в равенство (1), получаем представление данной функции $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме:

$$\underset{x\in(-\infty;+\infty)}{f(x)}=\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(e\cos\omega+e\omega\sin\omega-1)\right)\cos\omega x+\left(\frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(-e\omega\cos\omega+e\sin\omega+\omega)\right)\sin\omega x\right)d\omega.$$

Составленный несобственный интеграл гарантированно сходится к функции $S(x)$, которая составляется по теореме Дирихле, и отличается от функции $f(x)$ только в точках скачков; в решаемой задаче $S(x)$ имеет вид:

$$\left[\begin{array}{l} S(x)=0, \quad x\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty) \\ S(x)=e^x, \quad x\in(0;1) \\ S(x)=0{,}5, \quad x=0 \\ S(x)=\dfrac{e}{2}, \quad x=1 \end{array}\right.$$

Комплексная форма интеграла Фурье имеет следующий теоретический вид:

$$\underset{x\in(-\infty;+\infty)}{f(x)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}c(\omega)e^{i\omega x}d\omega, \qquad c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx\,;$$

вычисляем функции $c(\omega)$:

$$c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^x e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^{x(1-i\omega)}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-i\omega)}}{1-i\omega}-\frac{1}{1-i\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1-i\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1+\omega^2}\right)(1+i\omega)\,;$$

подставляя $c(\omega)$, получаем представление той же функции $f(x)$ интегралом Фурье в комплексной форме:

$$\underset{x\in(-\infty;+\infty)}{f(x)}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1+\omega^2}\right)(1+i\omega)e^{i\omega x}d\omega\,.$$

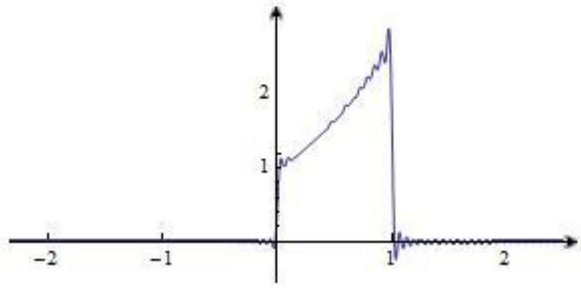
2. Чтобы подтвердить **достоверность** полученного представления функции $f(x)$, построим график интеграла Фурье в действительной форме на промежутке $x\in(-l;\,l)$, заменив в несобственном интеграле верхний бесконечный предел интегрирования некоторым большим числом A:

$$\underset{x\in(-l;\,l)}{f(x)}=\int_0^{A}\left(\left(\frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(e\cos\omega+e\omega\sin\omega-1)\right)\cos\omega x+\left(\frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(-e\omega\cos\omega+e\sin\omega+\omega)\right)\sin\omega x\right)d\omega.$$

Используем ПМП «Wolfram Mathematica 7»:

$$\text{Plot}[\int_0^{A}\left(\frac{1}{\pi*\left(\omega^2+1\right)}*\left(e*Cos[\omega]+e*\omega*Sin[\omega]-1\right)\right)*Cos[\omega*x]+$$

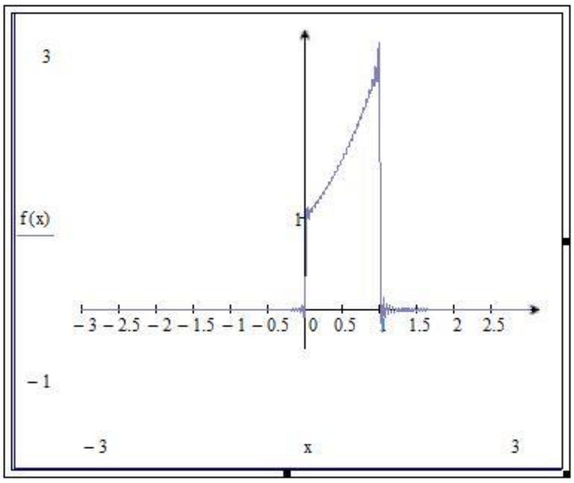
$$\left(\frac{1}{\pi*\left(\omega^2+1\right)}*\left(-e*\omega*Cos[\omega]+e*Sin[\omega]+\omega\right)\right)*Sin[\omega*x]dx,\ \{x,\,-3,\,3\}]$$



Продолжительность счета при значении A = 100 примерно 40 минут.
Используем ПП «MathCad»:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}\left(\frac{1}{\omega^{2}+1}*\left(e*\cos(\omega)+e*\omega*\sin(\omega)-1\right)*\cos(\omega*x)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{\omega^{2}+1}*\left(-e*\omega*\cos(\omega)+e*\sin(\omega)+\omega\right)*\sin(\omega*x)\right)dx$$



Продолжительность счета при значении A=150 составляет несколько секунд.

3. Запишем **косинус-преобразование Фурье** $a(\omega)$**, синус-преобразование Фурье** $b(\omega)$ **и комплексное преобразование Фурье** $c(\omega)$ **данной функции** $f(x)$**:**

$$a(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x dx=\frac{e}{(\omega^{2}+1)}(\cos\omega+\omega\sin\omega)-\frac{1}{(\omega^{2}+1)},\quad \omega\in[0;\ +\infty);$$

$$b(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x dx=\frac{e}{(\omega^{2}+1)}(-\omega\cos\omega+\sin\omega)+\frac{\omega}{(\omega^{2}+1)},\quad \omega\in[0;\ +\infty);$$

$$c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1+\omega^{2}}\right)(1+i\omega),\ \ \omega\in(-\infty;\ +\infty).$$

4. Определим **непрерывный амплитудный спектр** $A(\omega)$ данной функции $f(x)$, построим его график. Для действительной формы интеграла Фурье:

$$\underset{\omega\ge 0}{A(\omega)} = \sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\left(\frac{e}{(\omega^2+1)}(\cos\omega+\omega\sin\omega)-\frac{1}{(\omega^2+1)}\right)^2+\left(\frac{e}{(\omega^2+1)}(-\omega\cos\omega+\sin\omega)+\frac{\omega}{(\omega^2+1)}\right)^2} =$$

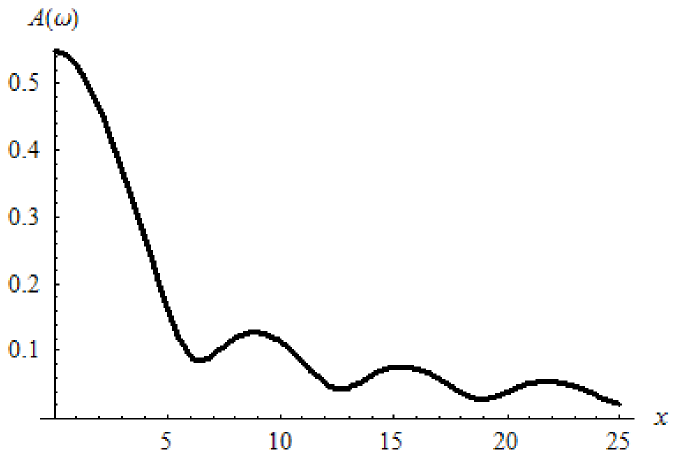
$$= \frac{1}{\pi(\omega^2+1)}\sqrt{(e\cos\omega+e\omega\sin\omega-1)^2+(-e\omega\cos\omega+e\sin\omega+\omega)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(e^2\cos^2\omega+1+e^2\omega^2\sin^2\omega+e^2\omega\sin 2\omega-2e\cos\omega-2e\omega\sin\omega+$$

$$+e^2\omega^2\cos^2\omega+\omega^2+e^2\sin^2\omega-2e\omega^2\cos\omega+2e\omega\sin\omega-e^2\omega\sin 2\omega)^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(e^2+1+e^2\omega^2-2e\cos\omega+\omega^2-2e\omega^2\cos\omega)^{0,5} = \boxed{\frac{1}{\pi(\omega^2+1)^{0,5}}\sqrt{1+e^2-2e\cos\omega} = A(\omega),\ \ \omega\ge 0};$$

график амплитудного спектра по действительной форме интеграла Фурье:



Амплитудный спектр $A(\omega)$ для комплексной формы составленного интеграла Фурье:

$$\underset{\omega\in(-\infty;+\infty)}{\tilde{A}(\omega)} = |c(\omega)| = \left|\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1+\omega^2}\right)(1+i\omega)\right| = \frac{1}{2\pi(1+\omega^2)}\left|\big((e\cos\omega-1)-ie\sin\omega\big)(1+i\omega)\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1+\omega^2)}\left|\big((e\cos\omega-1+e\sin\omega)-i(e\sin\omega+\omega-e\omega\cos\omega)\big)\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi(\omega^2+1)}\sqrt{(e\cos\omega+e\omega\sin\omega-1)^2+(-e\omega\cos\omega+e\sin\omega+\omega)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(\omega^2+1)}\sqrt{(e\cos\omega+e\omega\sin\omega-1)^2+(-e\omega\cos\omega+e\sin\omega+\omega)^2} =$$

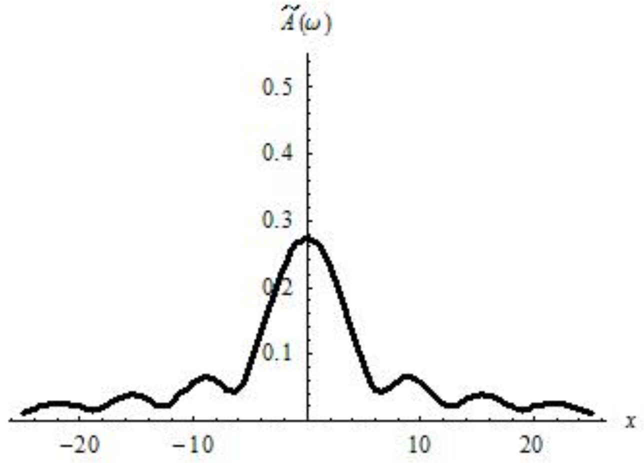
$$= \frac{1}{2\pi(\omega^2+1)}(e^2\cos^2\omega+1+e^2\omega^2\sin^2\omega+e^2\omega\sin 2\omega-2e\cos\omega-2e\omega\sin\omega+$$

$$+e^2\omega^2\cos^2\omega+\omega^2+e^2\sin^2\omega-2e\omega^2\cos\omega+2e\omega\sin\omega-e^2\omega\sin 2\omega)^{0,5} =$$

$$= \frac{1}{2\pi(\omega^2+1)}(e^2+1+e^2\omega^2-2e\cos\omega+\omega^2-2e\omega^2\cos\omega)^{0,5} =$$

$$=\boxed{\frac{1}{2\pi(\omega^2+1)^{0,5}}\sqrt{1+e^2-2e\cos\omega}=\tilde{A}(\omega),\in\left(-\infty;\,+\infty\right)};$$

график амплитудного спектра по комплексной форме интеграла Фурье:



Очевидно, что при значениях $\omega\in\left[0;\,+\infty\right)$ выполняется равенство $A(\omega)=0,5\cdot A(\omega)$.

Ответ по задаче 4:

1. Представление $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме:

$$\underset{x\in(-\infty;+\infty)}{f(x)}=\int_0^{\infty}\left(\left(\frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(e\cos\omega+e\omega\sin\omega-1)\right)\cos\omega x+\left(\frac{1}{\pi(\omega^2+1)}(-e\omega\cos\omega+e\sin\omega+\omega)\right)\sin\omega x\right)d\omega;$$

представление $f(x)$ интегралом Фурье в комплексной форме:

$$\underset{x\in(-\infty;+\infty)}{f(x)}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1+\omega^2}\right)(1+i\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

2. Преобразования Фурье функции $f(x)$:

$$a(\omega)=\frac{e}{(\omega^2+1)}(\cos\omega+\omega\sin\omega)-\frac{1}{(\omega^2+1)},\quad \omega\in\left[0;\ +\infty\right)$$ (косинус-преобразование);

$$b(\omega)=\frac{e}{(\omega^2+1)}(-\omega\cos\omega+\sin\omega)+\frac{\omega}{(\omega^2+1)},\quad \omega\in\left[0;\ +\infty\right)$$ (синус-преобразование);

$$c(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{(1-i\omega)}-1}{1+\omega^2}\right)(1+i\omega),\ \omega\in\left(-\infty;\ +\infty\right)$$ (комплексное преобразование).

3. Амплитудный спектр функции $f(x)$:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi(\omega^2+1)^{0,5}}\sqrt{1+e^2-2e\cos\omega},\quad \omega\in\left[0;\ +\infty\right);$$

$$\tilde{A}(\omega)=\frac{1}{2\pi(\omega^2+1)^{0,5}}\sqrt{1+e^2-2e\cos\omega},\quad \omega\in\left(-\infty;\ +\infty\right).$$

Приложение А. Варианты заданий

Задача **1** Разложить в тригонометрический ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, имеющую наименьший период $T = 2\pi$. Составить сумму ряда $S(x)$ и построить её график.

Варианты

1. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 0,\ x \in [-\pi;0] \\ \cos 2x,\ x \in (0;\pi) \end{array}\right.$	2. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 0,\ x \in [-\pi;0) \\ x^2+1,\ x \in [0;\pi) \end{array}\right.$	3. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 0,\ x \in (-\pi;0) \\ \sin 2x,\ x \in [0;\pi] \end{array}\right.$
4. $f(x) = \left[\begin{array}{l} x^2,\ x \in [-\pi;0) \\ 0,\ x \in [0;\pi) \end{array}\right.$	5. $f(x) = \left[\begin{array}{l} -x,\ x \in [-\pi;0] \\ 1,\ x \in (0;\pi) \end{array}\right.$	6. $f(x) = \left[\begin{array}{l} \pi,\ x \in [-\pi;0) \\ \pi - \frac{x}{2},\ x \in [0;\pi) \end{array}\right.$
7. $f(x) = \cos\frac{x}{2},\ x \in [-\pi;\pi)$	8. $f(x) = \sin\frac{x}{2},\ x \in [-\pi;\pi)$	9. $f(x) = \sin\frac{x}{3},\ x \in [-\pi;\pi)$
10. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 0,\ x \in [-\pi;0] \\ \cos x,\ x \in (0;\pi) \end{array}\right.$	11. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 2,\ x \in [-\pi;0] \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2},\ x \in (0;\pi) \end{array}\right.$	12. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 1,\ x \in [-\pi;0] \\ \pi - x,\ x \in (0;\pi) \end{array}\right.$
13. $f(x) = \lvert x \rvert - \pi,\ x \in [-\pi;\pi)$	14. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 0,\ x \in [-\pi;0] \\ \pi^2 - x^2,\ x \in (0;\pi) \end{array}\right.$	15. $f(x) = \cos\frac{x}{3},\ x \in [-\pi;\pi)$
16. $f(x) = \operatorname{sh} x,\ x \in [-\pi;\pi)$	17. $f(x) = e^{-x},\ x \in [-\pi;\pi)$	18. $f(x) = \left[\begin{array}{l} x^2,\ x \in [-\pi;0) \\ 0,\ x \in [0;\pi) \end{array}\right.$
19. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 0,\ x \in [-\pi;0) \\ e^x,\ x \in [0;\pi) \end{array}\right.$	20. $f(x) = x^2 + 4x,\ x \in [-\pi;\pi)$	21. $f(x) = \operatorname{ch} x,\ x \in [-\pi;\pi)$
22. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 1+x^2,\ x \in [-\pi;0) \\ 0,\ x \in [0;\pi) \end{array}\right.$	23. $f(x) = \left[\begin{array}{l} e^{-x},\ x \in [-\pi;0) \\ 0,\ x \in [0;\pi) \end{array}\right.$	24. $f(x) = \cos\frac{x}{2} + 1,\ x \in [-\pi;\pi)$
25. $f(x) = chx,\ x \in [-\pi;0)$	26. $f(x) = \left[\begin{array}{l} 2,\ x \in [-\pi;0) \\ -2,\ x \in [0;\pi) \end{array}\right.$	27. $f(x) = \lvert x \rvert + \pi,\ x \in [-\pi;\pi)$

Задача **2** Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$, имеющую наименьший период $T = 2l$. Составить сумму ряда $S(x)$. Найти амплитудный спектр функции и построить его график..

Варианты

1. $f(x) = 2 - \lvert x \rvert$, $x \in [-2;2)$, $T = 4$	2. $f(x) = 1 - \lvert x \rvert$, $x \in [-1;1)$, $T = 2$	3. $f(x) = x$, $x \in [-1;1)$, $T = 2$
4. $f(x) = -\frac{x}{2}$, $x \in [-2;2)$, $T = 4$	5. $f(x) = e^{\lvert x \rvert}$, $x \in [-2;2)$, $T = 4$	6. $f(x) = e^{-\lvert x \rvert}$, $x \in [-1;1)$, $T = 2$

7. $f(x)=2x-2$, $x\in[-1;1)$, $T=2$	8. $f(x)=4-x$, $x\in[-4;4)$, $T=8$	9. $f(x)=\frac{1}{2}x+2$, $x\in[-2;2)$, $T=4$
10. $f(x)=\operatorname{sh}x$, $x\in[-2;2)$, $T=4$	11. $f(x)=4-x^2$, $x\in[-1;1)$, $T=2$	12. $f(x)=x^2$, $x\in[-2;2)$, $T=4$
13. $f(x)=\left[\begin{array}{l}3,\ x\in[-2;0)\\ -x,\ x\in[0;2)\end{array}\right.$, $T=4$	14. $f(x)=\lvert x\rvert$, $x\in[-2;2)$, $T=4$	15. $f(x)=x-1$, $x\in[-1;1)$, $T=2$
16. $f(x)=\left[\begin{array}{l}-2,\ x\in[-1;0)\\ 3,\ x\in[0;1)\end{array}\right.$, $T=2$	17. $f(x)=\frac{x}{2}$, $x\in[-1;1)$, $T=2$	18. $f(x)=\lvert x\rvert-1$, $x\in[-1;1)$, $T=2$
19. $f(x)=3-\lvert x\rvert$, $x\in[-3;3)$, $T=6$	20. $f(x)=3x$, $x\in[-1;1)$, $T=2$	21. $f(x)=\left[\begin{array}{l}-1.5,\ x\in[-1;0)\\ 1,\ x\in[0;1)\end{array}\right.$, $T=2$
22. $f(x)=\frac{1}{4}x$, $x\in[-2;2)$, $T=4$	23. $f(x)=\lvert x\rvert-2$, $x\in[-1;1)$, $T=2$	24. $f(x)=\lvert x\rvert+x$, $x\in[-2;2), T=4$
25. $f(x)=\left[\begin{array}{l}-1,\ x\in[-3;0)\\ 3,\ x\in[0;3]\end{array}\right.$ $T=6$	26. $f(x)=\left[\begin{array}{l}0,\ x\in[-1;0)\\ \sin\frac{\pi x}{2},\ x\in[0;1)\end{array}\right.$ $T=2$	27. $f(x)=\left[\begin{array}{l}-2,\ x\in[-2;0)\\ 3,\ x\in[0;2)\end{array}\right.$ $T=4$

План решения задач 1и 2

1. Постройте график функции $f(x)$, $x\in[-l;l)$ и ее периодического продолжения. Проанализируйте возможность разложения $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.
2. Запишите теоретический вид ряда Фурье для $f(x)$ и формулы для коэффициентов ряда, учитывая величину периода и свойства четности функции $f(x)$, если оно есть.
3. Вычислите коэффициенты ряда a_0, a_n и b_n, подставьте их в формально составленный ранее ряд Фурье.
4. Подтвердите достоверность разложения построением графиков частичных сумм $S_k(x)$ составленного ряда Фурье, увеличивая k до визуального совпадения графиков функций $S_k(x)$ и $f(x)$.
5. Запишите сумму ряда $S(x), x\in(-\infty;+\infty)$, используя теорему Дирихле; постройте график функции $S(x)$.
6. Найдите амплитудный спектр $A_n=\sqrt{(a_n)^2+(b_n)^2}$ и постройте его график.
7. Составьте ответ по задаче.

***Задача* 3** Составить тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме для периодической функции $f(x), T=2l$. Определить дискретный амплитудный спектр функции.

Варианты

1. $f(x)=e^{-x}+1,\ T=2\pi$	2. $f(x)=e^{x}-1,\ T=2\pi$	3. $f(x)=e^{-3x},\ T=2\pi$
4. $f(x)=e^{2x},\ T=2\pi$	5. $f(x)=e^{-2x}+1,\ T=2\pi$	6. $f(x)=e^{\lvert x\rvert}+1,\ T=4$
7. $f(x)=e^{-x}+2,\ T=2\pi$	8. $f(x)=e^{-\lvert x\rvert},\ T=2\pi$	9. $f(x)=e^{-0.5x}+2,\ T=2\pi$
10. $f(x)=e^{\lvert x\rvert},\ T=4$	11. $f(x)=e^{-\lvert x\rvert}+1,\ T=2$	12. $f(x)=e^{3x}-1,\ T=2\pi$
13. $f(x)=e^{-3x},\ T=2\pi$	14. $f(x)=e^{0.5x},\ T=2\pi$	15. $f(x)=e^{-0.5x},\ T=2\pi$
16. $f(x)=e^{\lvert x\rvert},\ T=2$	17. $f(x)=e^{x}+1,\ T=2\pi$	18. $f(x)=e^{0.5x}-2,\ T=2\pi$
19. $f(x)=e^{2x}-1,\ T=2\pi$	20. $f(x)=e^{-\lvert x\rvert}+2,\ T=4$	21. $f(x)=e^{-\lvert x\rvert},\ T=2$
22. $f(x)=e^{3x}+1,\ T=2\pi$	23. $f(x)=e^{\lvert x\rvert}-2,\ T=2$	24. $f(x)=e^{0.5x},T=2\pi$
25. $f(x)=e^{-0.5x}+2,T=2\pi$	26. $f(x)=x+\pi,\ T=2\pi$	27. $f(x)=x-1,\ T=2$

План решения задачи 3

1. Составьте ряд Фурье в комплексной форме для функции $f(x)$, $x\in(-l;l)$, вычислите коэффициенты ряда. Запишите сумму ряда $S(x)$, $x\in(-\infty;+\infty)$, используя теорему Дирихле.
2. Перейдите от комплексной формы ряда Фурье к его действительной форме и подтвердите достоверность разложения построением графиков нескольких частичных сумм составленного ряда Фурье в действительной форме.
3. Определите дискретный амплитудный спектр функции $f(x)$. Вычислите значения нескольких амплитуд A_n, $n=1,2,3,4,5,10,15,\ \ldots$. Постройте график $A_n=A(\omega_n)$, где ω_n – частота n-й гармоники.
4. Составьте ответ по задаче.

***Задача* 4** Составить представления функции $f(x)$ интегралом Фурье. Найти преобразования Фурье и определить непрерывный амплитудный спектр функции $f(x)$.

Варианты

1. $f(x)=\left[\begin{array}{l}\sin x,\ x\in[0;\pi]\\ 0,\ x\notin[0;\pi]\end{array}\right.$	2. $f(x)=\left[\begin{array}{l}x+1,\ x\in[0;1]\\ 0,\ x\notin[0;1]\end{array}\right.$	3. $f(x)=\left[\begin{array}{l}e^{-x},\ x\in[0;1]\\ 0,\ x\notin[0;1]\end{array}\right.$

4. $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$	5. $f(x)=\begin{cases}-x+1, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$	6. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$
7. $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$	8. $f(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$	9. $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in[0;\pi]\\ 0, & x\notin[0;\pi]\end{cases}$
10. $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}, & x\in[-\pi;\pi]\\ 0, & x\notin[-\pi;\pi]\end{cases}$	11. $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{2}}, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$	12. $f(x)=\begin{cases}2, & x\in[0;3]\\ 0, & x\notin[0;3]\end{cases}$
13. $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in[0;\frac{\pi}{2}]\\ 0, & x\notin[0;\frac{\pi}{2}]\end{cases}$	14. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\in[0;4]\\ 0, & x\notin[0;4]\end{cases}$	15. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$
16. $f(x)=\begin{cases}-\frac{x}{2}, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$	17. $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[0;2]\\ 0, & x\notin[0;2]\end{cases}$	18. $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$
19. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in[-\pi;\pi]\\ 0, & x\notin[-\pi;\pi]\end{cases}$	20. $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}, & x\in[0;\pi]\\ 0, & x\notin[0;\pi]\end{cases}$	21. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[0;4]\\ 0, & x\notin[0;4]\end{cases}$
22. $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}, & x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\\ 0, & x\notin[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]\end{cases}$	23. $f(x)=\begin{cases}-\frac{x}{2}, & x\in[0;4]\\ 0, & x\notin[0;4]\end{cases}$	24. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$
25. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\in[0;\pi]\\ 0, & x\notin[0;\pi]\end{cases}$	26. $f(x)=\begin{cases}e^{x}, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$	27. $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2}, & x\in[0;1]\\ 0, & x\notin[0;1]\end{cases}$

План решения задачи 4

1. Составьте представления функции $f(x)$ интегралом Фурье в действительной форме и в комплексной форме. Запишите функцию $S(x)$, к которой сходится составленный интеграл Фурье.
2. Подтвердите достоверность представления построением графика интеграла Фурье на промежутке $x\in(-l;\, l)$, где число l нужно взять большим.
3. Запишите косинус-преобразование, синус-преобразование и комплексное преобразование Фурье функции $f(x)$.
4. Определите непрерывный амплитудный спектр $A(\omega)$ функции $f(x)$, постройте его график.
5. Составьте ответ по задаче.